

Abitur 2021 Haupttermin

Aufgabe I

Teilaufgabe 1

Aufgabenstellung

Die Organisatoren einer Umweltschutzorganisation möchten an einem abgelegenen Ort eine Infoveranstaltung durchführen. Leider gibt es dort keinen Stromanschluss. Es wird überlegt, für den Betrieb von Bühnen- und Tontechnik Muskelkraft einzusetzen. Mit einem Fahrrad soll ein Generator angetrieben werden. Die Fahrrad-Halte-Vorrichtung besteht aus zwei Komponenten (siehe Abb. 1). Durch zwei seitliche Bügel an einem vorderen Podest wird verhindert, dass sich der Lenker dreht. Das Hinterrad wird mit der Nabe so eingehängt, dass es sich frei in der Luft drehen kann. Die hintere Komponente besitzt auf der Unterseite eine Gummimatte, die ein Verrutschen verhindert.

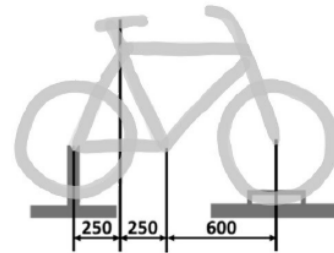


Abbildung 1: Skizze des Fahrrads samt Aufhängevorrichtung
(der Schwerpunkt des Fahrers befindet sich vereinfacht über dem Sattel)

a) Zeichnen Sie einen bemaßten Freischnitt dieses Systems.

3 VP

Bezug zum Bildungsplan:

3.4.3.1 Technische Mechanik

- (1) ebene statische Systeme analysieren (unter anderem Wertigkeit von Lagern und Gelenken, eingeprägte Kräfte und Momente, statische Bestimmtheit)

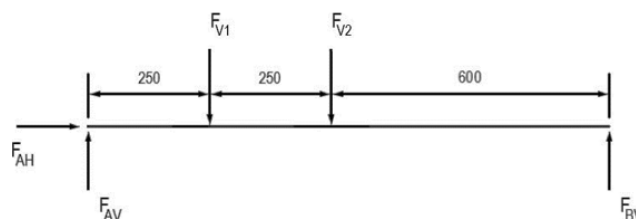
F NWT 3.2.3.2 Statische Prinzipien in Natur und Technik

L MB Information und Wissen

Vorüberlegungen:

Aus dem einführenden Text lässt sich entnehmen, dass die feste Einspannung ein zweiwertiges Lager darstellt, die vordere Einspannung entspricht einem einwertigen Lager. Es treten weiter zwei vertikale Kräfte auf: Zum einen die Gewichtskraft des Fahrrads mit Schwerpunkt im Tretlager, zum anderen die doppelte Gewichtskraft des Fahrers (Sicherheitsfaktor) mit Schwerpunkt über dem Sattel.

Daraus ergibt sich folgende Lösung:



Aufgabenstellung (Fortsetzung)

Im Betrieb soll das Fahrrad von Nutzern bis 90 kg bedient werden können. Um einen gefahrlosen Betrieb zu gewährleisten, ist für die maximale Belastung ein Sicherheitsfaktor von 2 vorgesehen. Das Fahrrad wiegt 15 kg, wobei der Schwerpunkt nicht genau in der Mitte liegt, sondern beim Tretlager (siehe Abb. 1).

- b) Berechnen Sie alle Lagerreaktionen der beiden Lager. Sie dürfen dabei von statischer Bestimmtheit und einem Ortsfaktor von $9,81 \frac{N}{kg}$ ausgehen. 6 VP

Bezug zum Bildungsplan:

3.4.3.1 Technische Mechanik

(2) Lagerreaktionen in ebenen statischen Systemen unter der Verwendung des Schnittprinzips und der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen

F M 3.4.1 Leitidee Zahl – Variable – Operation (11), (12)

F PH 3.2.7 Mechanik: Dynamik (3), (4), (7)

Vorüberlegungen:

Die Bestimmung der Lagerreaktionen erfolgt über die drei Gleichgewichtsbedingungen für das statische Gleichgewicht: Die Summe aller horizontalen Kräfte, aller vertikalen Kräfte und aller Drehmomente muss jeweils Null ergeben. Ohne horizontale Kräfte treten in diesem Fall also nur jeweils eine vertikale Kraft je Lager auf. Für die Berechnung der Drehmomente ist es damit gleichgültig, ob der Drehpunkt in A oder B gesetzt wird. Mit Drehpunkt in A ergibt sich folgende

Lösung:

F_{AH} ist die Einzige horizontale Kraft und muss daher Null sein:

$$\sum H = F_{AH} = 0N$$

Auch die Summe der vertikalen Kräfte muss in der Summe Null ergeben. Kräfte nach oben sind positiv, Kräfte nach unten negativ angegeben.

$$\begin{aligned}\sum V &= F_{AV} + F_{BV} - F_{V1} - F_{V2} = 0N \\ \Rightarrow F_{AV} + F_{BV} &= 180kg \cdot 9,81 \frac{N}{kg} + 15kg \cdot 9,81 \frac{N}{kg} \\ \Rightarrow F_{AV} + F_{BV} &= 1912,95N\end{aligned}$$

Zuletzt muss natürlich auch die Summe der Drehmomente Null ergeben. Drehmomente im Gegenuhrzeigersinn sind hier positiv, Drehmomente im Uhrzeigersinn negativ angegeben. Der Drehpunkt wird in Lager A gelegt.

$$\begin{aligned}\sum M &= F_{BV} \cdot 1,1m - F_{V1} \cdot 0,25m - F_{V2} \cdot 0,5m = 0Nm \\ \Rightarrow F_{BV} &= \frac{180kg \cdot 9,81 \frac{N}{kg} + 15kg \cdot 9,81 \frac{N}{kg}}{1,1m} = \underline{\underline{468,20N}}\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Formel für die Summe der vertikalen Kräfte ein, ergibt sich:

$$F_{AV} = 1912,95N - 468,20N = \underline{\underline{1444,75N}}$$

Aufgabenstellung (Fortsetzung)

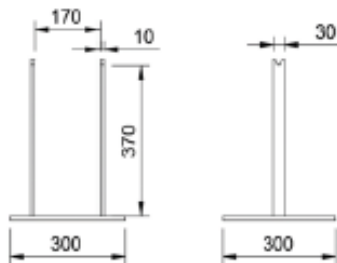
Der Ständer für das Hinterrad soll aus Stahl gefertigt werden. Hierzu werden zwei Leisten auf eine Grundplatte geschweißt. Die genauen Maße sind in der technischen Skizze angegeben (siehe M1). Gehen Sie von einer senkrechten Kraft in Höhe von 1500 N aus, die auf den Ständer wirkt.



Abbildung 2: Darstellung der Aufnahme des Hinterrads

- c) Bewerten Sie, ob die geplante Konstruktion den technischen Anforderungen zur Sicherheit gegen Versagen des Bauteils entspricht (siehe M2, M3). 6 VP

Material M1: Details der Aufnahme des Hinterrades, mit Materialkonstanten



Materialkonstanten Baustahl:
 Spez. Wärmekapazität: $0,45 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$
 Dichte: $7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
 E-Modul: $210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
 G-Modul: $81.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Material M2: Eulersche Knickfälle

Fall 1: $F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{4\ell^2} \cdot E \cdot I$				
Fall 2: $F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot E \cdot I$				
Fall 3: $F_{\text{krit}} = \frac{2\pi^2}{\ell^2} \cdot E \cdot I$				
Fall 4: $F_{\text{krit}} = \frac{4\pi^2}{\ell^2} \cdot E \cdot I$				
	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4

Material M3: Berechnung des Flächen- und Widerstandsmoments

Rechteck 	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = A \frac{h^2}{12}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} = A \frac{b^2}{12}$	$w_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = A \frac{h}{6}$ $w_z = \frac{h \cdot b^2}{6} = A \frac{b}{6}$
---------------------	---	---

Bezug zum Bildungsplan:

3.4.3.1 Technische Mechanik

- (4) den Zusammenhang zwischen *Last*, *Geometrie*, *Elastizitätsmodul* und maximaler Durchbiegung von Balken experimentell erfassen und zusammen mit der Theorie der Euler'schen Knickstäbe zur Dimensionierung von *Trägern* in verschiedenen Last- und Lagerfällen nutzen

P 2.1 Erkenntnisgewinnung und Forschen 2, 8, 9, 10, 14

P 2.2 Entwicklung und Konstruktion 3

P 2.4 Bedeutung und Bewertung 6, 7

Vorüberlegungen:

Bei der senkrechten Belastung dürfen die Träger, auf denen die Achse des Vorderrades aufliegt nicht wegnicken. Die Träger sind oben nicht eingespannt, somit handelt es sich um den 1. Eulerschen Knickfall. (siehe Material M2)

Aufgrund des kleineren Maßes werden die Träger sich im Versagensfall eher um die z-Achse als um die y-Achse drehen, somit muss das kleinere Flächenmoment I_z für die maximale Belastung herangezogen werden. Der E-Modul ist mit 210.000 N/mm² in Material M1 angegeben.

Lösung:

Wenn die Summe der kritischen Knicklasten der Träger größer als die wirkende Kraft F_{AV} ist, gilt die Konstruktion als sicher.

Zur Bestimmung der Knicklast muss zunächst I_z ermittelt werden:

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{30\text{mm} \cdot (10\text{mm})^3}{12} = 2500\text{mm}^4$$

Mit dem E-Modul von 210.000 N/mm² und der Formel für den 1. Euler-Fall ergibt sich:

$$F_{krit} = \frac{\pi^2}{4l^2} \cdot E \cdot I_z = \frac{\pi^2}{4 \cdot (370\text{mm})^2} \cdot 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2500\text{mm}^4 = \underline{\underline{9462,28\text{N}}}$$

Gemeinsam versagen die Träger also bei einer vertikalen Kraft von $F=18924,55$. Die wirkende Kraft ist mit $F_{AV}=1444,75$ N deutlich kleiner. Auch ein sehr hoher Sicherheitsfaktor würde daran nichts ändern.